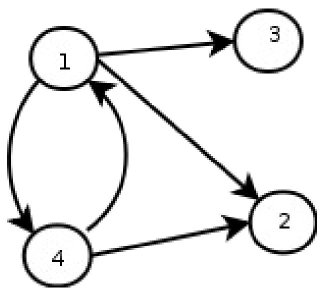
# Grafuri orientate

## Noțiuni de bază

**Definiție.** Se numește graf orientat o pereche ordonată de mulțimi *G = (V , E)*, unde *V* este o mulțime finită și nevidă de elemente numite **vârfuri** sau **noduri**, iar *E* este o mulțime de perechi ordonate de elemente distincte din *V* numite **arce**.

Pentru un arc $e=(x,y)\in E$ , spunem că $x$ și $y$ sunt **adiacente**, $x$ este **extremitatea inițială** a arcului *e*, *y* este **extremitatea finală**, *x* și *y* sunt **incidente** cu *e*, *x* este **predecesorul** lui *y*, iar *y* este **succesorul** lui *x*.

*Exemplu:*
*V* = {1 , 2 , 3 , 4}
*E* = {(1 , 2) , (1 , 3) , (1 , 4) , (4 , 1) , (4 , 2)}
*Observație:*
Conform definiției, un arc nu apare de mai multe ori și nu există arce de la un vârf la el însuși.




### Definiții alternative

**Definiție.** Se numește graf orientat o pereche ordonată de mulțimi *G = (V , E)*, unde mulțimea *V* este finită și nevidă – mulțimea vârfurilor, iar *E* este o mulțime de perechi ordonate de elemente din *V* numită mulțimea arcelor.

*Observație:* Conform definiției de mai sus este posibilă apariția în graf a buclelor – arc de la un vârf la el însuși.

**Definiție.** Se numește graf orientat o pereche ordonată *G = (V , E)* unde mulțimea *V* este finită și nevidă – mulțimea vârfurilor, iar *E* este o familie de perechi ordonate din *V* – mulțimea arcelor.

*Observație:* Din această definiție rezultă că într-un graf orientat se admit bucle și de asemenea în graf pot fi mai multe arce identice.

Dacă numărul arcelor identice dintr-un graf nu depășește o valoare *p*, spunem că *G* este un **p-graf**.

În continuare ne vom referi la *1-grafuri fără bucle*.

**Definiție.** Se numește **gradul interior** al unui vârf *x* și se notează $d^-(x)$ numărul arcelor de forma *(y,x)*. Se numește **gradul exterior** al unui vârf *x* și se notează $d^+(x)$ numărul arcelor de forma *(x,y)*.

Se notează:

- $\Gamma^{+(x)}=\{y\in V \text{ astfel încât } (x,y)\in E\}$ , mulțimea succesorilor lui *x*;
- $\Gamma^{+(x)}=\{y\in V \text{ astfel încât } (y,x)\in E\}$ , mulțimea predecesorilor lui *x*;
- $\omega^{+(x)}=\{e=(x,y) \text{ cu } y\in V\}$ , mulțimea arcelor care ies din *x*;
- $\omega^{+(x)}=\{e=(y,x) \text{ cu } y\in V\}$ , mulțimea arcelor care intră în *x*;

**Definiție.** Fie *G = (V , E)* un graf orientat. Se numește **lanț** o succesiune de arce $L=[e_1,e_2,..,e_k]$ cu proprietatea că oricare două arce consecutive $e_i$ , $e_{i+1}$ au o extremitate comună.

*Observație:* Într-un lanț, orientarea arcelor nu are importanță.

**Definiție.** Fie *G = (V , E)* un graf orientat. Se numește **drum** o succesiune de vârfuri

$L=[x_1,x_2,..,x_k]$ cu proprietatea că $(x_1,x_2),...,(x_{k-1},x_k)$ sunt arce. Un drum în care toate vârfurile sunt distincte se numește **drum elementar**.

**Definiție.** Se numește **circuit** un drum în care primul vârf este identic cu ultimul, iar arcele nu se repetă. Un drum în care vârfurile nu se repetă, cu excepția primului și a ultimului se numește **circuit elementar**.

**Definiție.** Se numește **graf parțial** pentru un graf orientat $G=(V , E)$ un graf $G'=(V , E')$ cu proprietatea că $E' \subseteq E$

Se numește **subgraf** al lui $G$ un graf $G' = (V' , E')$, unde $V' \subseteq V$ și $E'$ conține toate arcele din E care au ambele extremități în $V'$.

**Definiție.** Un graf orientat se numește **complet** dacă oricare două vârfuri distincte sunt adiacente.

Spre deosebire de grafurile neorientate, unde pentru o mulțime de vârfuri exista un singur graf complet, în cazul grafurilor orientate, pentru o mulțime de vârfuri date putem avea mai multe grafuri complete, mai precis $3^{C_n^2}$ .

**Definiție.** Se numește **graf turneu** un graf cu proprietatea că între oricare două vârfuri distincte există exact un arc.

**Proprietate.** În orice graf turneu există un drum elementar care conține toate vârfurile grafului.

**Definiție.** Un graf orientat $G = (V , E)$ se numește **conex** dacă între oricare două vârfuri distincte există cel puțin un lanț.

Se numește componentă conexă a unui graf orientat $G = (V , E)$ un subgraf conex și maximal cu această proprietate – oricum am mai alege un alt vârf din arbore nu există lanț de la acel vârf la oricare vârf din subgraf.

## Reprezentarea grafurilor orientate

Un graf orientat poate fi reprezentat prin matrice de adiacență, listă de arce, liste de vecini (de succesori), cu o semnificație similară cu cazul grafurilor neorienate.

## Matricea drumurilor

Se numește matricea drumurilor asociată unui graf G cu n varfuri o matrice pătratică de dimensiune n, în care elementele sunt 0 sau 1, cu următoarea semnificație:

$$M_{ij}=\begin{Bmatrix} 1, \text{ dacă există drum de la i la j} \\ 0, \text{ dacă nu există drum de la i la j} \end{Bmatrix}$$

Matricea drumurilor poate fi determinată plecând de la matricea de adiacență folosind algoritmul lui **Roy-Warshall**.

- considerăm fiecare vârf *k* din graf
  - luăm fiecare pereche de vârfuri *i*, *j* pentru care nu există încă drum de la *i* la *j*
    - dacă există drum de la *i* la *k* și există drum de la *k* la *j* atunci
      - există drum de la *i* la *j*.

## Tare conexitate

**Definiție.** Un graf orientat $G = (V, E)$ este **tare conex** dacă are un singur vârf sau dacă pentru oricare două vârfuri *x* și *y* din V, există un drum de la *x* la *y* și un drum de la *y* la *x*.

Se numește **componentă tare conexă** a unui graf $G = (V , E)$ un subgraf $G' = (V' , E')$ care este tare conex și maximal cu această proprietate (dacă s-ar mai adăuga un vârf din V – V', subgraful nu ar mai fi tare conex)

**Determinarea componentelor tare conexe**

- plecăm de la matricea drumurilor
- pentru fiecare vârf *i* care nu a fost încă inclus într-o componentă tare conexă
  - determinăm $S(i)=\{x \in V \text{ aî există drum de la i la x}\}$
  - determinăm $F(i)=\{x \in V \text{ aî există drum de la x la i}\}$
  - componenta tare conexă a lui *i* va fi $(S(i) \cap F(i)) \cup \{i\}$